

Aufgaben zu Parabeln

1.0 Die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ ist die Gleichung einer Parabel mit dem Scheitel S und den auf ihr liegenden Punkten P und Q.

Ermitteln Sie jeweils die Werte der Formvariablen a, b und c.

1.1 $a = 4$; $S(-2/-5)$ ☐

1.2 $c = -2$; $P(2/3)$; $Q(-1/4)$ ☒

1.3 $a = 2$; $P(4/0)$; $b = c$ ☒

1.4 $b = 2$; $S(3/5)$ ☐

2.0 Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Parabeln gegebenenfalls in Abhängigkeit von a.

2.1 $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ ☐

2.2 $y = ax^2 - 2x$ ($a \neq 0$) ☒

2.3 $y = ax^2 + 2x - 1,6$ ($a \neq 0$) ☒

2.4 $y = -x^2 + ax + 3$ ☒

2.5 $y = 3x^2 - 4x + 2,5$ ☐

2.6 $y = 2x^2 + 6x + 4,5$ ☐

3.0 Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel, die die Koordinatenachsen in den Punkten schneidet. ☒

3.1 $A(0/-16)$, $B(2/0)$ und $C(-4/0)$

3.2 $A(0/-1)$, $B(5/0)$ und $C(-1/0)$

4 Bestimmen Sie durch Rechnung t so, dass die Gerade $g: y = 4x + t$ eine Tangente an die Parabel mit der Gleichung $p: y = -x^2 - 4x + 1$ ist und berechnen Sie den Berührungspunkt. ☒

5.0 Bestimmen Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte der Funktionen gegebenenfalls in Abhängigkeit von a.

5.1 $p_1: y = x^2 + 2$ und $p_2: y = x^2 - 2x + 5$ ☐

5.2 $p_1: y = x^2 - 3x$ und $p_2: y = -x^2 + x + 6$ ☐

5.3 $p_1: y = x^2 + 4x - 1$ und $p_a: y = 2x^2 + x + 2a^2$ ☒

5.4 $f_a: y = x^2 - ax + 4$ und $g: y = 3x + 4$ ☒

5.5 $f_a: y = ax^2 - 1$ ($a \neq 0$) und $g: y = 3$ ☒

5.6 $f_a: y = ax(ax - 4)$ ($a \neq 0$) und $g: y = -4$ ☒

5.7 $f: y = -\frac{3}{2}x^2 + 2x$ und $g_a: y = -ax$ ☒

5.8 $f_a: y = 2x^2 + ax + 2$ und $g_a: y = a(x + 2)$ ☒

5.9 $f_a: y = 2x^2 + 2ax - 4a$ und $g_a: y = 6x - 0,5a^2$ ☒

5.10 $f_a: y = x^2 + 3ax - 4a^2$ und $g_a: y = -x^2 + x(a + 6)$ ☒

6.0 Von einer quadratischen Funktion sind der Leitkoeffizient a und die Nullstellen bekannt. Geben Sie die Funktionsgleichung in der Produktform, der allgemeinen Form und der Scheitelpunktform an. ○

6.1 $a=1$; $x_1=-1$; $x_2=3$

6.2 $a=1,5$; $x_1=1$; $x_2=5$

6.3 $a=-2$; $x_1=2$; $x_2=2$

6.4 $a=\frac{2}{3}$; $x_1=1,5$; $x_2=7,5$

7.0 Entscheiden Sie, ob es sich um eine wahre oder falsche Aussage handelt. ⚡

7.1 Wenn die Nullstellen einer quadratischen Funktion sich nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden, ist die Parabel achsensymmetrisch zur y -Achse.

7.2 Wenn die Parabel die x -Achse berührt, hat der Scheitelpunkt den x -Wert 0.

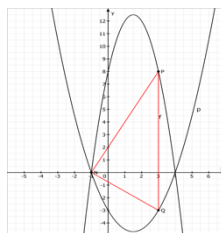
7.3 Wenn eine Parabel zwei Schnittpunkte mit der x -Achse hat und nach oben geöffnet ist, hat der Scheitelpunkt einen negativen y -Wert.

7.4 Wenn eine quadratische Funktion keine Nullstellen hat, lässt sich die Funktionsgleichung nicht in der Produktform angeben.

8.0 Gegeben sind die quadratische Funktion f mit $f(x)=-2x^2+6x+8$ und die quadratische Funktion p mit $p(x)=0,75x^2-2,25x-3$.

8.1 Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der zugehörigen Parabeln. ⚡

8.2* Die Gerade g mit $g(x)=2x+2$ schneidet den Graphen von f im Punkt P . Der Punkt Q liegt auf dem Graphen von p und hat die gleiche x -Koordinate wie der Punkt P . Die Punkte $N(-1/0)$, P und Q bilden ein Dreieck. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Dreiecks. ●



8.3 Untersuchen Sie, um wie viel Einheiten der Graph von f nach unten verschoben werden muss, damit er mit der Geraden g genau einen gemeinsamen Punkt hat. ⚡

9.0 Gegeben ist die Schar der Funktionen f_a mit $f_a(x) = ax^2 - a$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

9.1 Bestimmen Sie den Wert des Parameters a so, dass der Punkt $A(-2/-3)$ auf dem Graphen von f_a liegt. ☐

9.2 Zeigen Sie, dass die Nullstellen von f_a vom Parameter a unabhängig sind und folgern Sie aus der Lage der Nullstellen eine Aussage zur Lage des Scheitelpunktes der Parabel. ☒

9.3 Bestätigen Sie durch Rechnung die Koordinaten des Scheitelpunktes in Abhängigkeit von a . ☐

9.4 Geben Sie den Wert des Parameters a für den Fall an, dass der Scheitelpunkt des Graphen von f_a bei $(0/3)$ liegt. ☐

9.5 Begründen Sie ohne Rechnung, dass der Graph von f_a und der Graph der linearen Funktion g mit $g(x) = -2x$ sich immer schneiden. Bestätigen Sie dies anschließend durch eine Rechnung. ☒

9.6 Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter a die gegenseitige Lage des Graphen von f_a und des Graphen der linearen Funktion g mit $g(x) = x+1$ und geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten des/der Berührungspunkte(s) an. ☒

10.0 Gegeben ist die Schar der Funktionen p_a mit $p_a(x) = ax^2 + (1+a)x + 1$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

10.1 Geben Sie an, für welche Werte des Parameters a die Scharparabel nach unten geöffnet ist. ☐

10.2 Bestimmen Sie den Wert des Parameters a so, dass p_a eine doppelte Nullstelle hat. ☒

10.3 Berechnen Sie, für welchen Wert a der Scheitel der Scharparabel auf der y -Achse liegt. ☒

10.4 Bestimmen Sie, für welchen Wert des Parameters a der Graph von p_a die Gerade g mit $g(x) = -x - 1$ berührt. Berechnen Sie dafür auch die Koordinaten des Berührungspunktes. ☒

10.5 Zeigen Sie, dass sich alle Parabeln der Schar an der Stelle $x = 0$ schneiden. ☒

11 Gegeben sind die Funktionenscharen f_b und g_b durch $f_b(x) = -3x^2 + bx + 1$ und $g_b(x) = x^2 - 2x + b$ mit $b \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie b so, dass sich die Graphen von f_b und g_b berühren. ☒

12.0 Gegeben ist die reelle Funktion f_k mit $f_k(x) = x^2 - kx + 3k$ und $k \in \mathbb{R}$.

12.1 Ermitteln Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes der Scharparabeln in Abhängigkeit von k . ☐

12.2 Zeichnen Sie die Parabeln für $k \in \{-1; 0; 1; 2\}$. ☐

12.3 Bestimmen Sie den Zahlenbereich für k so, dass die zugehörigen Graphen keinen gemeinsamen Punkt mit der x -Achse haben. ☒

12.4 Zeigen Sie, dass sich alle Scharparabeln im Punkt $A(3/9)$ schneiden. ☒

13.0 Gegeben ist eine Parabelschar p_b mit $p_b(x) = -x^2 + 2bx - 6x + 6b - 7$.

13.1 Stellen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes der Scharparabeln in Abhängigkeit von b dar. ☒

13.2 Ermitteln Sie die Gleichung der Parabel der Schar, die durch den Punkt $B(-7/6)$ verläuft. ☐

13.3 Die Parabel mit der Gleichung $y = -x^2 - 8x - 13$ ist eine Parabel der Schar. Berechnen Sie den Wert, den die Formvariable b für diesen Fall hat. ☒

13.4 Weisen Sie durch Rechnung nach, dass alle Parabeln der Schar durch den Punkt $A(-3/2)$ verlaufen. ☐

13.5 Die Parabelschar enthält zwei Parabeln, welche die Gerade g mit der Gleichung $g(x) = 3x + 13,25$ berühren. Ermitteln Sie die Gleichungen dieser Parabeln und die Koordinaten der Berührungspunkte. ☒

14.0 Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_a .

14.1 Stellen Sie die Funktionsgleichung von f_a auf, wenn sie Nullstellen bei $x = -2$ und $x = a$ hat und ihr Graph kongruent ist zur nach unten geöffneten Normalparabel. ☒

14.2 Ermitteln Sie allein mit den Angaben in Teilaufgabe 14.1 die Koordinaten des Scheitelpunktes der Scharparabeln in Abhängigkeit vom Parameter a . Geben Sie dann die Gleichung der Funktion in der Scheitelpunktform und in der allgemeinen Form an. ☒
(Teilergebnis: $f_a(x) = -x^2 + (a-2)x + 2a$)

14.3 Bestimmen Sie alle Werte des Parameters a so, dass die zugehörige Parabel nicht durch den I. Quadranten verläuft. ☒

14.4 Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter a die gegenseitige Lage des Graphen von f_a und des Graphen der linearen Funktion g mit $g(x) = -0,5x$ und geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten des/der Berührungspunkte(s) an. ☒

15.0 Gegeben ist die reelle Funktion f_k mit $f_k(x) = (k-1)x^2 - 2kx + k + 3$ und $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

15.1 Ermitteln Sie den Wert des Parameters k so, dass der zugehörige Graph durch den Ursprung verläuft. ○

15.2 Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von f_k in Abhängigkeit von k . ⊗

16 Gegeben sind die lineare Funktion $g: x \mapsto -\frac{4}{3}x + 8$ und eine quadratische Funktion p mit den Definitionsmengen $D_g = D_p = \mathbb{R}$. Die beiden Schnittpunkte der Geraden G_g mit den Koordinatenachsen des Koordinatensystems liegen auf der Parabel G_p . Einer dieser Punkte ist zugleich der Scheitelpunkt der Parabel G_p .
Bestimmen Sie eine mögliche Funktionsgleichung der quadratischen Funktion p . ⊗
(Abitur 2022 Teil 1)

17.0 Gegeben ist die quadratische Funktion $f_a: x \mapsto \frac{1}{a} \cdot (-x^2 + a \cdot x + 3a)$ mit der Definitionsmenge $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ihr Graph wird mit G_{f_a} bezeichnet.
(Abitur 2022 All)

17.1 Untersuchen Sie rechnerisch, ob es einen Wert für a gibt, sodass die Parabel G_{f_a} den Scheitelpunkt $E(3|4,5)$ hat. ⊗

17.2 Bestimmen Sie den Wert für a , für welche die Funktion f_a genau eine doppelte Nullstelle besitzt. ⊗

Lösungen

1.1 $y = 4x^2 + bx + c$

$$y = 4(x+2)^2 - 5 = 4(x^2 + 4x + 4) - 5 = 4x^2 + 16x + 16 - 5 = 4x^2 + 16x + 11$$

$$\Rightarrow b = 16 \quad c = 11$$

1.2 $y = ax^2 + bx - 2$

$$P(2/3) \Rightarrow 3 = 4a + 2b - 2 \Rightarrow 5 = 4a + 2b$$

$$Q(-1/4) \Rightarrow 4 = a - b - 2 \Rightarrow 6 = a - b$$

$$(I) \quad 5 = 4a + 2b$$

$$(II) \quad 6 = a - b \quad \Rightarrow a = 6 + b$$

$$a = 6 + b \text{ in (I): } 5 = 4(6 + b) + 2b \Rightarrow 5 = 24 + 4b + 2b \Rightarrow 6b = -19$$

$$\Rightarrow b = -\frac{19}{6}$$

$$\Rightarrow a = 6 - \frac{19}{6} = \frac{17}{6}$$

1.3 $y = 2x^2 + bx + b$

$$P(0/4) \Rightarrow 0 = 2 \cdot 16 + 4b + b \Rightarrow 0 = 32 + 5b \Rightarrow b = -\frac{32}{5} = -6,4 = c$$

1.4 $y = a(x-3)^2 + 5 \Rightarrow y = a(x^2 - 6x + 9) + 5 \Rightarrow y = ax^2 - 6ax + 9a + 5$

$$\Rightarrow -6a = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow c = 9 \cdot \left(-\frac{1}{3} + 5\right) = -3 + 5 = 2$$

2.1 $N_1(2/0)$ und $N_2(-2/0)$

2.2 $N_1(0/0)$ und $N_2\left(\frac{2}{a}/0\right)$

2.3 $x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot a \cdot (-1,6)}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 6,4a}}{2a}$

$$4 + 6,4a > 0 \Rightarrow a > -0,625 \text{ (außer } a = 0) \Rightarrow \text{zwei Nullstellen}$$

$$4 + 6,4a = 0 \Rightarrow a = -0,625 \Rightarrow \text{eine Nullstelle}$$

$$4 + 6,4a < 0 \Rightarrow a < -0,625 \Rightarrow \text{keine Nullstelle}$$

2.4 $x_{1/2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{-2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 12}}{-2}$

$a^2 + 12$ ist für alle a größer Null, also hat die Parabel für alle a zwei Nullstellen.

2.5 keine Nullstellen f) $N(-\frac{3}{2}/0)$

3.1 Ansatz: $y = ax^2 + bx + c$ und dann die Punkte A,B und C einsetzen

(I) $-16 = c$

(II) $0 = 4a + 2b + c$

(III) $0 = 16a - 4b + c$

$\Rightarrow a = 2$ und $b = 4 \Rightarrow y = 2x^2 + 4x - 16$

3.2 gleicher Ansatz wie bei 3.1

$\Rightarrow y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}x - 1$

4. Gleichsetzen der Geraden und der Parabel $\Rightarrow$

$-x^2 - 4x + 1 = 4x + t$

$-x^2 - 8x + 1 - t = 0$

$x_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot (-1) \cdot (1-t)}}{-2} = \frac{8 \pm \sqrt{68 - 4t}}{-2}$

Tangente $\Rightarrow 68 - 4t = 0 \Rightarrow t = 17$

$\Rightarrow$ Berührungspunkt $B(-4/1)$

5.1 Ein Schnittpunkt: $S(1,5/4,25)$

5.2 Zwei Schnittpunkte: $S_1(-1/4)$ und $S_2(3/0)$

5.3 $x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1 - 2a^2)}}{-2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5 - 8a^2}}{-2}$

$5 - 8a^2 > 0 \Rightarrow -\sqrt{\frac{5}{8}} < a < \sqrt{\frac{5}{8}} \Rightarrow$ zwei gemeinsame Punkte

$5 - 8a^2 = 0 \Rightarrow a = -\sqrt{\frac{5}{8}}$ und $a = \sqrt{\frac{5}{8}} \Rightarrow$ ein gemeinsamer Punkt

$5 - 8a^2 < 0 \Rightarrow a < -\sqrt{\frac{5}{8}}$ und $a > \sqrt{\frac{5}{8}} \Rightarrow$ kein gemeinsamer Punkt

5.4

$x^2 - ax + 4 = 3x + 4 \Rightarrow x^2 - ax - 3x = 0 \Rightarrow x(x - a - 3) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0 \quad x - a - 3 = 0 \Rightarrow x_2 = a + 3$

$a = -3$: ein gemeinsamer Punkt bei $x=0$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$: zwei gemeinsame Punkte bei $x_1=0$ und $x_2=a+3$

5.5

$ax^2 - 1 = 3 \Rightarrow ax^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{a}$

$\Rightarrow$ zwei gemeinsame Punkte für alle $a \in \mathbb{R}$ bei $x_1 = \sqrt{\frac{4}{a}}$ und $x_2 = -\sqrt{\frac{4}{a}}$

5.6

$$ax(ax-4)=-4 \Rightarrow a^2x^2-4ax+4=0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 4 \cdot a^2 \cdot 4}}{2a^2} = \frac{4a \pm \sqrt{0}}{2a^2} = \frac{2}{a}$$

$\Rightarrow$ ein gemeinsamer Punkt für alle $a \in \mathbb{R}$ bei $x = \frac{2}{a}$

5.7

$$-\frac{3}{2}x^2 + 2x = -ax \Rightarrow -\frac{3}{2}x^2 + 2x + ax = 0 \Rightarrow x(-\frac{3}{2}x + 2 + a) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad -\frac{3}{2}x + 2 + a = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}a$$

$a = -2$: ein gemeinsamer Punkt bei $x = 0$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$: zwei gemeinsame Punkte bei $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}a$

5.8

$$2x^2 + ax + 2 = a(x+2) \Rightarrow 2x^2 + ax + 2 = ax + 2a \Rightarrow 2x^2 + 2 - 2a = 0 \Rightarrow x^2 = a - 1$$

ein gemeinsamer Punkt, wenn $a-1=0 \Rightarrow a=1$ ($x=0$)

zwei gemeinsame Punkte, wenn $a-1>0 \Rightarrow a>1$ ($x_1 = \sqrt{a-1}$ $x_2 = -\sqrt{a-1}$)

kein gemeinsamer Punkt, wenn $a-1<0 \Rightarrow a<1$

5.9

$$2x^2 + 2ax - 4a = 6x - 0,5a^2 \Rightarrow 2x^2 + (2a-6)x - 4a + 0,5a^2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-(2a-6) \pm \sqrt{(2a-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4a + 0,5a^2)}}{4} =$$

$$= \frac{-(2a-6) \pm \sqrt{4a^2 - 24a + 36 + 32a - 4a^2}}{4} = \frac{-(2a-6) \pm \sqrt{8a+36}}{4}$$

ein gemeinsamer Punkt, wenn $8a+36=0 \Rightarrow a=-4,5$ ($x = \frac{-(2 \cdot (-4,5) - 6)}{4} = 3,75$)

zwei gemeinsame Punkte, wenn $8a+36>0$

Skizze:

$$\Rightarrow a \in]-4,5; \infty[\quad (x_1 = \frac{-(2a-6) + \sqrt{8a+36}}{4} \text{ und } x_2 = \frac{-(2a-6) - \sqrt{8a+36}}{4})$$

kein gemeinsamer Punkt, wenn $8a+36<0$

$$\Rightarrow a \in]-\infty; -4,5[$$

5.10

$$x^2 + 3ax - 4a^2 = -x^2 + ax + 6x \Rightarrow 2x^2 + (2a-6)x - 4a^2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-(2a-6) \pm \sqrt{(2a-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4a^2)}}{4} =$$

$$= \frac{-(2a-6) \pm \sqrt{4a^2 - 24a + 36 + 32a^2}}{4} = \frac{-(2a-6) \pm \sqrt{36a^2 - 24a + 36}}{4}$$

ein gemeinsamer Punkt, wenn $36a^2 - 24a + 36 = 0 \Rightarrow a_{1/2} = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 4 \cdot 36 \cdot 36}}{6}$

Skizze:

$\Rightarrow$ Diskriminante ist für alle $a \in \mathbb{R}$ positiv

$\Rightarrow$ die Parabeln haben für alle $a \in \mathbb{R}$ zwei gemeinsame Punkte

6.1 $y = (x+1)(x-3) \quad y = x^2 - 2x - 3 \quad y = (x-1)^2 - 4$

6.2 $y = 1,5(x-1)(x-5) \quad y = 1,5x^2 - 9x + 7,5 \quad y = 1,5(x-3)^2 - 6$

6.3 $y = -2(x-2)(x-2) = -2(x-2)^2 \quad y = -2x^2 - 8x - 8 \quad y = -2(x-2)^2$

6.4 $y = \frac{2}{3}(x-1,5)(x-7,5) \quad y = \frac{2}{3}x^2 - 6x + 7,5 \quad y = \frac{2}{3}(x-4,5)^2 - 6$

7.1 Richtig.

7.2 Falsch, $y = (x-1)^2$ berührt die x-Achse und der Scheitelpunkt hat den x-Wert 1.

7.3 Richtig.

7.4 Richtig.

8.1

$$-2x^2 + 6x + 8 = 0,75x^2 - 2,25x - 3 \Rightarrow -2,75x^2 + 8,25x + 11 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -1,04 \quad x_2 = 4,71$$

$$y_1 = -0,40 \Rightarrow S_1(-1,04 / -0,40)$$

$$y_2 = -8,11 \Rightarrow S_2(4,71 / -8,11)$$

8.2

$$-2x^2 + 6x + 8 = 2x + 2 \Rightarrow -2x^2 + 4x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 3$$

$$\Rightarrow y_1 = 0 \quad y_2 = 8 \Rightarrow SP_1(-1/0) \quad P(3/8)$$

$$\Rightarrow Q(3/p(3)) \Rightarrow Q(3/-3)$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot (3 - (-1)) \cdot (8 - (-3)) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 11 = 22$$

8.3

$$-2x^2 + 6x + t = 2x + 2 \Rightarrow -2x^2 + 4x + t - 2 = 0$$

$$D = 16 - 4(-2)(t - 2) = 8t \Rightarrow 8t = 0 \Rightarrow t = 0$$

Der Graph von f müsste um 8 Einheiten nach unten verschoben werden.

9.1 $a(-2)^2 - a = -3 \Rightarrow 3a = -3 \Rightarrow a = -1$

9.2

$$ax^2 - a = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 1 \text{ unabhängig von } a$$

Der Scheitelpunkt muss damit auf der y-Achse liegen.

9.3 $x_s = -\frac{0}{2a} = 0 \quad y_s = a \cdot 0^2 - a = -a \Rightarrow S(0/-a)$

9.4 $a = -3$

9.5

Die Gerade g ist eine Ursprungsgerade.

Wenn $a > 0$, dann ist f eine nach oben geöffnete Parabel und der Scheitel liegt unterhalb der x-Achse.

Wenn $a < 0$, dann ist f eine nach unten geöffnete Parabel und der Scheitel liegt oberhalb der x-Achse.

$$ax^2 - a = -2x \Rightarrow ax^2 + 2x - a = 0$$

$$\Rightarrow D = 4 - 4a(-a) = 4 + 4a^2 > 0 \text{ für alle } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$\Rightarrow$ Parabel und Gerade haben immer zwei Schnittpunkte

9.6

$$ax^2 - a = x + 1 \Rightarrow ax^2 - x - a - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a(-a-1)}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{4a^2 + 4a + 1}}{2a}$$

$$1) 4a^2 + 4a + 1 = 0 \Rightarrow a = -0,5$$

$a = -0,5$: $f_{-0,5}$ und g haben einen gemeinsamen Punkt bei $x = -1$

$$2) 4a^2 + 4a + 1 > 0$$

Skizze:

$$\Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-0,5; 0\}: f_a \text{ und } g \text{ haben zwei gemeinsame Punkte}$$

10.1 $a < 0$

10.2

$$ax^2 + (1+a)x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow D = (1+a)^2 - 4a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$$

$$\Rightarrow D = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$10.3 \quad x_s = -\frac{1+a}{2a} = 0 \Rightarrow 1+a = 0 \Rightarrow a = -1$$

10.4

$$ax^2 + (1+a)x + 1 = -x - 1 \Rightarrow ax^2 + (2+a)x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow D = (2+a)^2 - 4a \cdot 2 = a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2$$

$$\Rightarrow D = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4}{4} = -1 \quad y = -(-1) - 1 = 0 \Rightarrow \text{BP}(-1/0)$$

10.5

$$y = a \cdot 0^2 + (1+a) \cdot 0 + 1 = 1$$

$\Rightarrow$ alle Parabeln gehen durch den Punkt $P(0/1)$

11

$$-3x^2 + bx + 1 = x^2 - 2x + b \Rightarrow -4x^2 + (b+2)x + 1 - b = 0$$

$$\Rightarrow D = (b+2)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (1-b) = b^2 + 4b + 4 + 16 - 16b = b^2 - 12b + 20$$

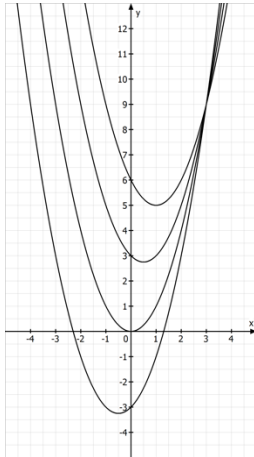
$$\Rightarrow D = 0 \Rightarrow b^2 - 12b + 20 = 0 \Rightarrow b_1 = 10 \quad b_2 = 2$$

12.1

$$x_s = -\frac{-k}{2} = \frac{1}{2}k$$

$$y_s = \left(\frac{1}{2}k\right)^2 - k \cdot \frac{1}{2}k + 3k = -\frac{1}{4}k^2 + 3k \Rightarrow S\left(\frac{1}{2}k / -\frac{1}{4}k^2 + 3k\right)$$

12.2



12.3

$$x^2 - kx + 3k = 0$$

$$\Rightarrow D = k^2 - 12k$$

$$\Rightarrow k^2 - 12k = 0 \Rightarrow k_1 = 0 \quad k_2 = 12$$

Skizze von $k^2 - 12k$:

$$\Rightarrow k \in]0; 12[$$

12.4

$$y = 3^2 - 3k + 3k = 9$$

$\Rightarrow$ alle Scharparabeln haben den Punkt (3/9) gemeinsam

13.1

$$x_s = -\frac{2b-6}{-2} = b-3$$

$$y_s = -(b-3)^2 + 2b(b-3) - 6(b-3) + 6b - 7 =$$

$$= -b^2 + 6b - 9 + 2b^2 - 6b - 6b + 18 + 6b - 7 = b^2 + 2$$

$$\Rightarrow S(b-3 / b^2 + 2)$$

13.2

$$-(-7)^2 + 2b(-7) - 6(-7) + 6b - 7 = 6$$

$$-49 - 14b + 42 + 6b - 7 = 6 \Rightarrow -8b - 14 = 6 \Rightarrow b = -2,5$$

$$\Rightarrow p_{-2,5}(x) = -x^2 - 11x - 22$$

13.3

$$(I) \quad 2b - 6 = -8 \Rightarrow b = -1$$

$$(II) \quad 6b - 7 = -13 \Rightarrow b = -1$$

13.4

$$-(-3)^2 + 2b(-3) - 6(-3) + 6b - 7 = -9 - 6b + 18 + 6b - 7 = 2$$

$\Rightarrow$ alle Scharparabeln haben den Punkt $(-3/2)$ gemeinsam

13.6

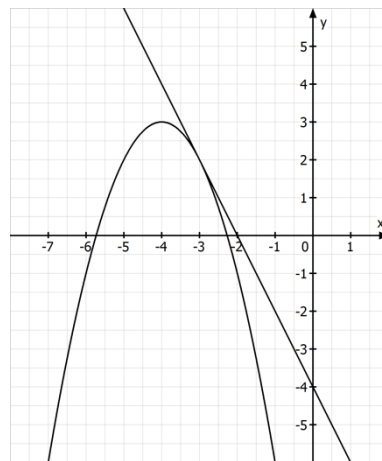
$$t: y = mx + t \Rightarrow 2 = -3m + t \Rightarrow t = 2 + 3m \Rightarrow y = mx + 2 + 3m$$

$$-x^2 - 8x - 13 = mx + 2 + 3m \Rightarrow -x^2 - 8x - mx - 15 - 3m = 0$$

$$\Rightarrow D = (-8 - m)^2 - 4(-1)(-15 - 3m) = 64 + 16m + m^2 - 60 - 12m = m^2 + 4m + 4$$

$$\Rightarrow m^2 + 4m + 4 = 0 \Rightarrow m = -2$$

$$\Rightarrow t: y = -2x - 4$$



14.1 $f_a(x) = -(x+2)(x-a) = -x^2 - 2x + ax + 2a$

14.2

$$x_s = \frac{-2+a}{2} = -1 + \frac{1}{2}a$$

$$y_s = -\left(-1 + \frac{1}{2}a + 2\right)\left(-1 + \frac{1}{2}a - a\right) = -\left(1 + \frac{1}{2}a\right)\left(-1 - \frac{1}{2}a\right) = \frac{1}{4}a^2 + a + 1$$

$$\Rightarrow S\left(-1 + \frac{1}{2}a / \frac{1}{4}a^2 + a + 1\right)$$

$$\Rightarrow f_a(x) = -\left(x + 1 - \frac{1}{2}a\right)^2 + \frac{1}{4}a^2 + a + 1$$

$$\Rightarrow f_a(x) = -x^2 - 2x + ax + 2a$$

14.3 Die Parabel darf keine positive Nullstelle haben $\Rightarrow a \leq 0$

14.4

$$-x^2 - 2x + ax + 2a = -0,5x \Rightarrow -x^2 - 1,5x + ax + 2a = 0$$

$$\Rightarrow D = (-1,5 + a)^2 - 4(-1)(2a) = a^2 - 3a + 2,25 + 8a = a^2 + 5a + 2,25$$

$$\Rightarrow a^2 + 5a + 2,25 = 0 \Rightarrow a_1 = -0,5 \quad a_2 = -4,5$$

$$\Rightarrow a = -0,5: \text{BP}(-1/0,5)$$

$$\Rightarrow a = -4,5: \text{BP}(-3/1,5)$$

Skizze von $a^2 + 5a + 2,25$:

$$\Rightarrow a \in]-4,5; -0,5[\quad \text{keine gemeinsamen Punkte}$$

$$\Rightarrow a \in]-\infty; -4,5[\cup]-0,5; \infty[\quad \text{zwei gemeinsame Punkte}$$

15.1 $(k-1) \cdot 0^2 - 2k \cdot 0 + k + 3 = 0 \Rightarrow k = -3$

15.2

$$(k-1)x^2 - 2kx + k + 3 = 0$$

$$\Rightarrow D = (-2k)^2 - 4(k-1)(k+3) = 4k^2 - 4k^2 - 8k + 12 = -8k + 12$$

$$\Rightarrow -8k + 12 = 0 \Rightarrow k = 1,5$$

$$\Rightarrow k = 1,5: \text{eine Nullstelle}$$

Skizze von $-8k + 12$:

$$\Rightarrow k \in]-\infty; 1,5[: \text{zwei Nullstellen} \quad (k \neq 1)$$

$$\Rightarrow k \in]1,5; \infty[: \text{keine Nullstellen}$$

16

$$g(x) = -\frac{4}{3}x + 8$$

$$\text{Schnittpunkt mit der } x\text{-Achse: } -\frac{4}{3}x + 8 = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow N(6|0)$$

$$\text{Schnittpunkt mit der } y\text{-Achse: } S_y(0|8)$$

$$p(x) = a(x-6)^2 \Rightarrow 8 = a(0-6)^2 \Rightarrow 8 = 36a \Rightarrow a = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{2}{9}(x-6)^2$$

Alternative:

$$p(x) = a \cdot x^2 + 8 \Rightarrow 0 = a \cdot 6^2 + 8 \Rightarrow a = -\frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow p(x) = -\frac{2}{9}x^2 + 8$$

17.1

$$f_a(x) = -\frac{1}{a}x^2 + x + 3$$

$$x_s = -\frac{1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)} = \frac{a}{2} \quad y_s = -\frac{1}{a} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a}{2} + 3 = -\frac{a}{4} + \frac{a}{2} + 3 = \frac{a}{4} + 3$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 6 \quad y_s = \frac{6}{4} + 3 = 4,5$$

$\Rightarrow$ für $a = 6$ ist E der Scheitelpunkt

17.2

$$f_a(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{a}x^2 + x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) \cdot 3}}{-\frac{2}{a}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{12}{a}}}{-\frac{2}{a}}$$

$$\text{eine doppelte Nullstelle} \Rightarrow 1 + \frac{12}{a} = 0 \Rightarrow \frac{12}{a} = -1 \Rightarrow a = -12$$